

EX: 1 (limite et continuité :)

- 1°) calculer les limites : a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x^2 - 4x + 2}{1 - x} \right)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x - 1}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x - 3}{1 - 2x}$  d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 1}{(x - 2)^2}$  ; e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x + 3}{x^2 + 3x + 2}$   
 2°) Mq l'éq:  $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8 = 0$  admet au moins une solution dans l'intervalle:  $I = [0, 2]$

EX: 2  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4(x - 2)}$

- 1°) Déterminer  $D_f$  et calculer les limites de  $f$  dans les bornes de  $D_f$ .  
 2°- a) vérifier que :  
 $(\forall x \in D_f): f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x - 2}$   
 2°- b) Mq la droite  $(D)$  d'éq:  $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$  est une asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
 2°- c) Etudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(D)$ .  
 3°- a) Mq:  $(\forall x \in D_f): f'(x) = \frac{x(x - 4)}{4(x - 2)^2}$   
 3°- b) Etudier le signe de  $f'(x)$  puis donner le tableau de variation de  $f$ .  
 4°) Etudier la concavité de  $(\mathcal{C}_f)$   
 5°) Vérifier que le point  $S(2, \frac{5}{4})$  est centre de symétrie pour  $(\mathcal{C}_f)$   
 6°- a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'éq:  $f(x) = 0$

6°- b) Construire  $(\mathcal{C}_f)$ .

7°) soit  $(H)$  la droite d'éq:  
 $(H): y = \frac{1}{4}x$

7°- a) Mq le point d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(H)$  a pour abscisse:  $x_0 = \frac{2}{3}$ .

7°- b) Résoudre graphiquement l'inéquation:  $(x \in D_f); f(x) \leq \frac{1}{4}x$

EX: 3 Suites numériques :

$(u_n)$  définie par:  $u_0 = 2$  et:  
 $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}$

1°/ calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2°/ on pose:  $v_n = \frac{u_n - 2}{1 - u_n}$

2°- a) Calculer:  $v_0$ .

2°- b) Mq:  $v_{n+1} = \frac{1 - 2u_n}{1 - u_n}$  et

en déduire que:  $v_{n+1} - v_n = 3 \ (\forall n \in \mathbb{N})$

2°- c) Mq:  $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 3n$ .

3°- a) Mq:  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{v_n + 2}{v_n + 1}$

3°- b) En déduire que:  
 $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{3n + 2}{3n + 1}$

4°) calculer:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .



EX: 1 : leçon limite et continuité

1°) - a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{1 - x}$  un calcul

directe donne: " $\frac{0}{0}$ " F.I

on peut factoriser  $2x^2 - 4x + 2$  par  $(x-1)$ . on fait une division euclidienne; ou bien on calcule  $\Delta$ :

$$2x^2 - 4x + 2$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

$$\text{donc: } 2x^2 - 4x + 2 = 2(x + \frac{b}{2a})^2$$

$$\text{avec } \frac{b}{2a} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{donc: } \frac{2x^2 - 4x + 2}{1 - x} = \frac{2(x-1)^2}{1-x} = \frac{2(x-1)}{-1}$$

$$\text{puis: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{1 - x} = \frac{0}{-1} = \boxed{0}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x - 1} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = \boxed{+\infty}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-3}{1-2x} = \frac{\frac{1}{2}-3}{0} = \frac{(-\frac{5}{2})}{0} = \boxed{-\infty}$

pour déterminer le signe de 0

on fait un tableau: 

$x$	$\frac{1}{2}$
$1-2x$	$+$ $0$ $-$

donc  $1-2x$  égale à un  $0^-$

lorsque  $x \rightarrow \frac{1}{2}$

par suite:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x-3}{1-2x} = \frac{(-\frac{5}{2})}{0^-} = \boxed{-\infty}$

①

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x+1}{(x-2)^2} = \frac{-6+1}{0^+} = \frac{-5}{0^+} = \boxed{-\infty}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+3}{x^2+3x+2} = \frac{4}{0}$

on cherche le signe de 0:

on a:  $x^2 + 3x + 2$

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

donc:

$x$	$-2$	$-1$
$x^2 + 3x + 2$	$+$ $0$ $-$	$-$ $0$ $+$

$x \rightarrow -1$   
 $<$  donc le signe de 0 est " $-$ "

ainsi:  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+3}{x^2+3x+2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

2°)  $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8 = 0$

on pose:  $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 8$

avec:  $x \in [0; 2]$

$f$  est continue sur  $[0; 2]$

on a:  $f(0) = -8 < 0$

et  $f(2) = 2^5 - 2 \times 2^3 + 2^2 - 8 = 32 - 16 + 4 - 8 = 12 > 0$

donc  $f(0) \times f(2) = -8 \times 12 \leq 0$   
 et d'après le théorème des valeurs intermédiaires:  $\exists c \in [0, 2]; f(c) = 0$

c-à-d  $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8 = 0$  admet au moins une solution  $c \in [0, 2]$

EX: 2  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4(x-2)}$

1°) Soit  $x \in \mathbb{R}$ :  $x \in D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$

c-à-d  $x \neq 2$  donc:

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$$



on a :  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

les bornes de  $D_f$  sont :  $(-\infty; 2^-; 2^+; +\infty)$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4x} \quad (\text{car } f \text{ est rationnelle})$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{4} \right) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \end{cases}$$

on a :  $\begin{cases} x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \\ x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \end{cases}$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

résumé :

$x_0$	$-\infty$	$2^-$	$2^+$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2°-a) soit  $x \in D_f$  . on a :

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-2} = \frac{x(x-2) + 3(x-2) + 4}{4(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 3x - 6 + 4}{4(x-2)} = \frac{x^2 + x - 2}{4(x-2)} = f(x)$$

2°-b) Soit : (D) :  $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

d'après 2°-a) on a :  $[f(x) - y] = \frac{1}{x-2}$

donc :  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

donc la droite (D) est asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow +\infty$

2°-c) on cherche le signe de  $f(x) - y$

on a :  $x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} > 0$  : donc  $(\mathcal{C}_f)$  est au dessus de (D),

$x < 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} < 0$  : donc  $(\mathcal{C}_f)$  est au dessous de (D).

3°-a)  $f$  est dérivable sur  $D_f$  (car rationnelle) donc pour tout  $x \in D_f$  on a :

②

$$f'(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x-2} \right)'$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x-2) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$$

3°-b) soit  $x \in D_f$  donc  $(x-2)^2 > 0$  et  $f'(x)$  a le même signe que  $x(x-4)$  :

$x$	0	4
$x(x-4)$	+	-

Donc le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$

Req : ① on a  $f(0) = \frac{1}{4}$  et  $f(4) = \frac{9}{4}$

② on a utilisé les limites aux bornes : question 1°).

4°) Pour étudier la concavité de  $(\mathcal{C}_f)$  on doit calculer  $f''$ . Soit  $x \in D_f$  on a :

$$f''(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \right)'$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)}{4(x-2)^4} \times [(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)]$$

$$= \frac{1}{4(x-2)^3} \times [8] = \frac{2}{(x-2)^3}$$

donc  $f''(x)$  a le même signe que  $(x-2)$

$x$	2
$f''(x)$	-
concavité de $(\mathcal{C}_f)$	concave
	convexe

5°) on doit vérifier les deux conditions

$$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a-x \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$$



avec  $(a; b)$  sont les coordonnées de  $S$   
 c-à-d :  $a = 2$  et  $b = \frac{5}{4}$

1<sup>re</sup> Cond :  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 2$

$$\Leftrightarrow 4-x \neq 4-2 \text{ c-à-d } 4-x \neq 2$$

donc :  $\forall x \in D_f ; 4-x \in D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

2<sup>ème</sup> Cond : On compare :  $2b - f(x)$  et  $f(2a-x)$

$$\text{on a : } f(2a-x) = f(4-x) = \frac{(4-x)^2 + (4-x) - 2}{4x(4-x-2)}$$

$$= \frac{16 - 8x + x^2 + 4 - x - 2}{4(2-x)} = \frac{x^2 - 9x + 18}{4(2-x)}$$

$$2b - f(x) = 2 \times \frac{5}{4} - \frac{x^2 + x - 2}{4(x-2)}$$

$$= \frac{10(x-2) - x^2 - x + 2}{4(x-2)} = \frac{-x^2 - 9x + 18}{4(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - 9x + 18}{4(2-x)} = f(2a-x)$$

donc  $f(2a-x) = 2b - f(x) : (\forall x \in D_f)$

Conclusion :  $\left\{ S\left(2; \frac{5}{4}\right) \right\}$  est centre de symétrie pour  $(\mathcal{C}_f)$ .

6<sup>o</sup>-a) soit  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } \frac{x^2 + x - 2}{4(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 ; \Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$\text{et } x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 ; x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

donc les solutions sont :  $\{-2; 1\}$

[ c-à-d que  $(\mathcal{C}_f)$  coupe l'axe  $(Ox)$  aux points d'abscisses :  $-2$  et  $1$  ]

6<sup>o</sup>-b) voir plus loin. (à droite  $\rightarrow$  ?)

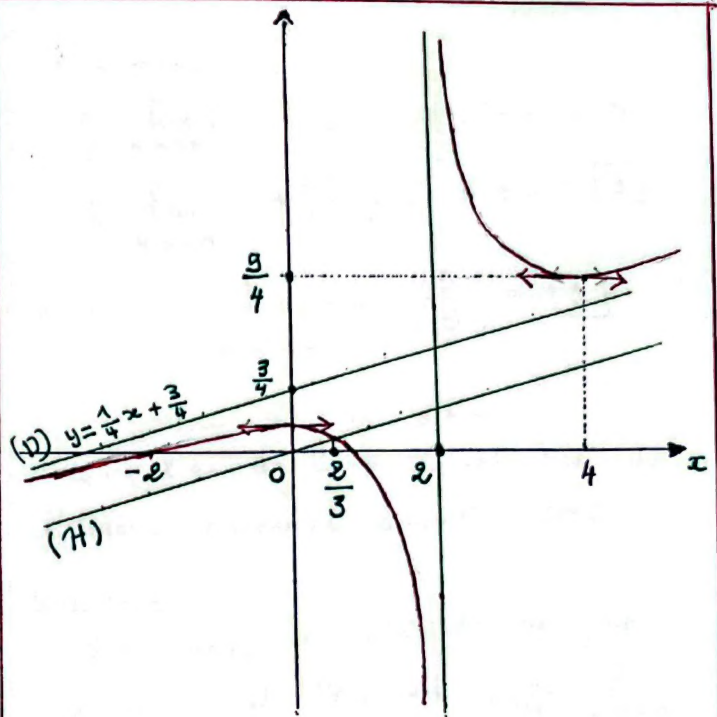
7<sup>o</sup>-a) il suffit de résoudre l'éq :

$$f(x) = \frac{1}{4}x \text{ c-à-d : } 4f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x-2} - x = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}} \text{ donc l'unique point}$$

d'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  avec  $(H)$  a pour abscisse :  $x_0 = \frac{2}{3}$  3



7<sup>o</sup>-b) Résolution graphique :

on cherche les morceaux de  $(\mathcal{C}_f)$  qui se trouvent au dessous de :  $(H)$   
 puis on lit les abscisses des points appartenant à ces morceaux ; on trouve :

$$f(x) \leq \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right[$$

donc l'ensemble des solutions :  $\left[\frac{2}{3}; 2\right[$

EX: 3  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}$

$$u_0 = 2$$

$$1^o) u_1 = \frac{4 \times (2) - 3}{3 \times (2) - 2} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$u_2 = \frac{4 \left(\frac{5}{4}\right) - 3}{3 \left(\frac{5}{4}\right) - 2} = \frac{5-3}{\frac{15-8}{4}} = 2 \times \frac{4}{7} = \boxed{\frac{8}{7}}$$

$$2^o) (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \frac{u_n - 2}{1 - u_n}$$

$$2^o-a) v_0 = \frac{u_0 - 2}{1 - u_0} = \boxed{0} \text{ car } u_0 = 2$$

$$2^o-b) v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{1 - u_{n+1}}$$

$$\frac{\frac{4u_n - 3}{3u_n - 2} - 2}{1 - \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}} = \frac{4u_n - 3 - 2(3u_n - 2)}{(3u_n - 2) - (4u_n - 3)}$$

$$= \frac{4u_n - 3 - 6u_n + 4}{3u_n - 2 - 4u_n + 3}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1 - 2u_n}{1 - u_n}$$

Déduction : on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1 - 2u_n}{1 - u_n} - \frac{u_n - 2}{1 - u_n} \\ &= \frac{1 - 2u_n - u_n + 2}{1 - u_n} = \frac{3(1 - u_n)}{1 - u_n} = \boxed{3} \end{aligned}$$

2°- c) D'après 2°- b)  $(v_n)_{n \geq 0}$  est

une suite arithmétique de raison :

$$r = 3 \quad (\text{car: } v_{n+1} - v_n = 3 = r)$$

$$\text{donc: } \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 + n \times r = 0 + n \times 3$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = 3n$$

$$3^\circ\text{-a)} \quad \text{on a: } (\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{u_n - 2}{1 - u_n}$$

$$\text{donc: } v_n \times (1 - u_n) = u_n - 2$$

$$\Rightarrow v_n - v_n u_n = u_n - 2$$

$$\Rightarrow v_n + 2 = u_n (1 + v_n)$$

$$\Rightarrow \frac{v_n + 2}{1 + v_n} = u_n$$

$$\text{donc: } (\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{v_n + 2}{v_n + 1}$$

3°- b) Déduction : on remplace

dans 3°- a) le terme  $v_n$  par son expression trouvé dans 2°- c).

$$\text{on obtient: } (\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{3n + 2}{3n + 1}$$

4°) Calculons la limite:  $\lim u_n$ ;

$$\text{on a: } \forall n \geq 1; \quad u_n = \frac{\frac{3n + 2}{n}}{\frac{3n + 1}{n}}$$

$$= \frac{3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}}$$

et comme :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{2}{n} \right) = 3 + 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3 + 0 = \boxed{3} \end{cases}$$

$$\text{alors: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

— \* fin \* —

Req: l'ex de la suite est tiré de l'examen national : BAC-Pro 2018.

Exercice

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

$$1^\circ\text{-a)} \quad Mq: (\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n < 1$$

$$1^\circ\text{-b)} \quad Mq \quad (u_n) \text{ est croissante (strictement)}$$

$$2^\circ) \quad \text{on pose: } (\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \frac{2}{1 - u_n}$$

2°-a) Mq  $(v_n)_n$  est une suite arithmétique de raison  $r = 2$ .

2°- b) Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{2n - 1}{2n + 1}$$

$$3^\circ\text{-a)} \quad Mq: (\forall n \in \mathbb{N}^*); \quad 0 < 1 - u_n < \frac{1}{n}$$

$$3^\circ\text{-b)} \quad \text{En déduire: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Bon Courage

4